# 98年度冬学期　計量社会科学　試験

松原 望 教官

1999年2月9日実施

## 1　予算制約下の効用最大化問題

３種類の財A, B, Cの消費量を $x, y, z$ とし、３変数の効用関数 (Utility Function) を $U(x, y, z) = xyz$ とする。予算による制約を $3x+4y+5z = 10$ とするとき、最適な消費量 $x^*, y^*, z^*$ を求めなさい。　〔ヒント〕　Lagrange

〔解答例〕

ラグランジュ乗数を $\lambda$ として

$$L = xyz - \lambda(3x + 4y + 5z - 10)$$

を導入し、

$$\partial L/\partial x = 0, \qquad \partial L/\partial y = 0, \qquad \partial L/\partial z = 0, \qquad \partial L/\partial \lambda = 0$$

とおけば、

$$yz - 3\lambda = 0, \quad yz = 3\lambda, \tag{1}$$
$$xz - 4\lambda = 0, \quad xz = 4\lambda, \tag{2}$$
$$xy - 5\lambda = 0, \quad xy = 5\lambda, \tag{3}$$
$$3x + 4y + 5z = 10 \tag{4}$$

と、最適解の満たす方程式が得られます（以上ができていれば解答として十分です）。

(1)×(2)×(3) より、　　　$(xyz)^2 = 60\lambda^3$ .

よって、

$$xyz = \sqrt{60}\lambda^{3/2} \tag{5}$$

が得られますが、これに (1),(2),(3) をそれぞれ代入すると、

$$x = \sqrt{60\lambda}/3, \tag{6}$$
$$y = \sqrt{60\lambda}/4, \tag{7}$$
$$z = \sqrt{60\lambda}/5 \tag{8}$$

と定まります。(6),(7),(8) を (4) に代入すると、

$$3\sqrt{60\lambda} = 10, \quad \sqrt{60\lambda} = 10/3$$

で、

$$\lambda = 5/27$$

と決まります。さらに (9) を (6),(7),(8) に代入すると、

$$x^* = \frac{10}{9}, \qquad y^* = \frac{5}{6}, \qquad z^* = \frac{2}{3}$$

と、最適消費量が求められます。

〔ラグランジュ乗数の解釈〕

予算制約式 $10 = 3x + 4y + 5z$ に変えて、$I = 3x + 4y + 5z$ としたら、(1),(2),(3),(5),(6),(7),(8) は上と同じで、

(4) のみ、
$$3x + 4y + 5z = I \tag{4'}$$
となります。(6),(7),(8) に (4)' を代入して、
$$3\sqrt{60\lambda} = I, \quad \sqrt{60\lambda} = I/3. \tag{9}$$
よって
$$\lambda = I^2/540$$
です。(9) を (6),(7),(8) に代入して、
$$x^* = \frac{I}{9}, \qquad y^* = \frac{I}{12}, \qquad z^* = \frac{I}{15}.$$

これらは予算 $I$ のもとでの需要関数にあたります。これを効用関数に代入すると、間接効用関数（予算 $I$, 価格ベクトル $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ が与えられたときの効用の最大値を表す関数。需要関数を効用関数に代入すれば求まります。今の問題では価格ベクトルは $(3, 4, 5)$ と固定されているので、予算 $I$ のみの関数となります。興味のある方は価格を $(p_1, p_2, p_3)$ として需要関数や間接効用関数を求めてみてください。）
$$U^* = x^* y^* z^* = I^3/1620$$
が求まります。ここで、
$$\partial U/\partial I = I^2/540 = \lambda$$
となることに注意しましょう。$\lambda$ は予算制約が微小変化したときの（需要量の変化を通じた）目的関数の変化、つまり予算制約の Shadow Price（影の価格）・Shadow Value（影の価値）と解釈できます。また、$I = 10$ のとき、$\partial U^*/\partial I = 10^2/540 = 5/27$ となることを確かめてください。

〔限界代替率について〕

限界代替率 (Marginal Rate of Substitution) とはミクロ経済学の消費者理論で使われる概念で、「AのBに対する限界代替率 $\mathrm{MRS}_{x,y}$」は、
$$\mathrm{MRS}_{x,y} = \lim_{\triangle y \to 0} (-\triangle x/\triangle y) = -dx/dy$$
で、無差別曲線の接線の傾き、つまり効用と当該財以外の消費量を一定に保ちながら、Bの消費量が微小単位 $dy$ 増加したときに、Aの消費量はどれだけ減らないといけないか、という $dy$ に見合ったAの減少分 $dx$ の関係を表します。$dy > 0$ なら $dx < 0$ なので、符号を正にして見やすくするために $dx/dy$ ではなく、$-dx/dy$ で表します。これはBとAとの主観的な交換比率（Aで測ったBの主観的な価格）と解釈できます。
$$U = U(x, y, z)$$
という効用関数を全微分すると、
$$dU = (\partial U/\partial x)dx + (\partial U/\partial y)dy + (\partial U/\partial z)dz$$
となりますが、無差別曲線上について考えているので効用を一定、$dU = 0$、また当該財以外の消費量も一定、$dz = 0$、とおくと、

$$0 = (\partial U/\partial x)dx + (\partial U/\partial y)dy + (\partial U/\partial z)0$$

よって、

$$MRS_{x,y} = -dx/dy = \frac{\partial U/\partial y}{\partial U/\partial x}.$$

効用関数が与えられていれば、それを偏微分した限界効用の比が限界代替率となります。消費者の効用最大化が達成されているのは、

$$\mathrm{MRS}_{x,y} = p_y/p_x$$

のときです。これは天から降ってくる価格（Aで測ったBの相対価格 $p_y/p_x$）に、自分の限界代替率を合わせるように最適消費量を選んでいるということです。価格比は客観的な交換比率（市場において、Aで測ったBの価格)、限界代替率は主観的な交換比率（Aで測ったBの相対価格 $\mathrm{MRS}_{x,y}$)、これが一致していないときには主観的な交換比率が客観的な交換比率より低い財を手放すと同時に主観的な交換比率が客観的な交換比率より高い財を購入して消費することによって効用をより大きくすることができるので、効用は最大化されていません。

本問に照らし合わせてみると、限界代替率＝相対価格、という効用最大化の条件は、

$$\mathrm{MRS}_{x,y} = \tfrac{\partial U/\partial y}{\partial U/\partial x} = p_y/p_x \text{ よって } zx/yz = x/y = 4/3\ ,$$
$$\mathrm{MRS}_{y,z} = \tfrac{\partial U/\partial z}{\partial U/\partial y} = p_z/p_y \text{ よって } xy/zx = y/z = 5/4\ ,$$
$$\mathrm{MRS}_{z,x} = \tfrac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial z} = p_x/p_z \quad \text{ よって } yz/xy = z/x = 3/5$$

と表され、これと予算制約式とから最適消費量が求まります。

〔参考〕　ミクロ経済学関係のサイト

http://www.ec.kagawa-u.ac.jp/~reiju/ 規範経済学

http://www.matsusaka-u.ac.jp/~aihara/indexm.html ミクロ・マクロから貨幣へ

http://www.econ.keio.ac.jp/staff/ito/lecture/index0.html マクロ経済学と経済数学の講義

http://www.iser.osaka-u.ac.jp/~saijo/lec/micro/98/micro98.html ミクロ経済学・厚生経済学の講義

http://skk.math.hc.keio.ac.jp/mathsoc/rep97/econ/index.html 経済学における数学利用

## 2　不確実性の経済学

i)　効用関数を

$$u(x) = \sqrt{x}$$

とするとき、次の投資（賭け）の確実同値額 (Certainty Equivalent) を求めなさい。

$$\left\langle \begin{array}{l} 500\text{ 万円, 確率 } 0.5 \\ 100\text{ 万円, 確率 } 0.5 \end{array} \right.$$

ii)　現状において、300 万円を保有している人のリスクプレミアム (Risk Premium) を求めなさい。

〔解答例〕

i)　以下では単位を万円で考えます。効用関数 $u(x) = \sqrt{x}$ のもとでは $x$ 円を $X$ 万円に単位変換すれば $x = 10000X$ なので、効用は $u(x) = \sqrt{x} = \sqrt{10000X} = 100\sqrt{X}$ と、どの値を入れても 100

倍で表されるので、万円単位で考えた $U(X)=\sqrt{X}$ を考えれば、十分だからです（常にそうとは限らないことに注意しましょう）。

この効用関数のもとでの期待効用 (Expected Utility) は、

$$E[U(X)] = 0.5U(500) + 0.5U(100) = 0.5\sqrt{500} + 0.5\sqrt{100} \simeq 16.180$$

となります（電卓なしでも、$\sqrt{5}$ さえ知っていれば計算可能）。この効用値を与える $X$（確実同値額）は、$\sqrt{X}=16.180$ から、

$$X = (16.180)^2 \simeq 261.80 \text{（万円）}$$

となります。

正確に $X$ の値を知りたければ、

$$X = 150 + 50\sqrt{5} \text{（万円）}$$

とでます。

ii)　300（万円）の持ち主は投資（賭け）に参加したいと思うでしょうか？　300 万円から得られる効用は

$$U(300) = \sqrt{300} \simeq 17.321 > 16.180$$

なので、投資（賭け）には参加しようとは思わないでしょう。

ここで 300（万円）の持ち主が投資（賭け）に参加しなければいけなくなったとします。つまり不確実性に直面しなければいけなくなった（現実の世界にはこういうケースがよくあるでしょう）ということです。投資（賭け）からの期待（粗）収益は 300（万円）ですが、期待効用は 16.180 しかありません (16.180 という数字自体が小さいというのではなく、300（万円）から得られる効用 17.321 に比べて小さいということ)。もし保険があるなら、保険プレミアムを払ってでも不確実性をなくしたいと思うでしょう。ただし、保険に加入すると保険プレミアムを払わなければいけません。つまり 300（万円）は守られますが、保険プレミアム $\rho$（万円）を払わねばならず、手元に残るのは $300-\rho$（万円）です。これを表にすると、

| | 投資に成功 | 投資に失敗 | 期待効用 |
|---|---:|---:|---:|
| 投資（賭け）に参加 | 500 | 100 | 16.180 |
| プレミアム $\rho$ を払って投資を回避 | $300-\rho$ | $300-\rho$ | $\sqrt{300-\rho}$ |
| 確率 | 0.5 | 0.5 | |

（単位：万円、ただし期待効用は除く）

と表せます。

投資の成功する確率は 0.5 で、そのとき投資に参加していれば 500（万円）が得られ、保険に入って投資を回避していれば $300-\rho$（万円）が得られ（というより保証され）ています。投資の失敗確率も 0.5 で、このとき投資に参加していれば 100（万円）が得られ、保険に入って投資を回避していれば $300-\rho$（万円）が得られ（というより保証され）ています。

表の右端の期待効用は、投資に参加したときの期待効用、i) でもとめたもの、と、保険プレミアムを払って投資を回避したときの期待効用

$$0.5\sqrt{300-\rho} + 0.5\sqrt{300-\rho} = \sqrt{300-\rho}$$

です。

投資に参加することから得られる期待効用と、保険プレミアムを払って投資を回避することから得られる期待効用、とが等しくなるような保険プレミアム $\rho$ は、

$$\sqrt{300-\rho} = 16.180$$

となる $\rho$、つまり、

$$\rho = 300 - (16.180)^2 \simeq 300 - 261.80 = 38.20\ (\text{万円})$$

です。ここでもとめたプレミアム $\rho$ は、これより高いプレミアムなら保険に入らないし、これより低いプレミアムなら保険に入る、という閾値（しきいち）になります。

正確に $\rho$ の値を求めたければ、

$$\sqrt{300-\rho} = 0.5\sqrt{500} + 0.5\sqrt{100}$$

を解いて、

$$\rho = 300 - (150 + 50\sqrt{5}) = 150 - 50\sqrt{5}$$

とでます。

〔オプション (Option)〕

300（万円）の持ち主にとっては、投資が成功したら 500（万円）が手に入り、投資が失敗したら保険がきいて 300（万円）が守られると都合がいいのですが、これを可能にするのがオプションです。オプションとは、都合のいいとき（投資に成功したとき）に使え、都合の悪いとき（投資が失敗したとき）には使わなくていい、「都合のいい権利」、だということを覚えておいてください。

オプションをプレミアム $C$（万円）で手に入れるとすると、

| | 投資に成功 | 投資に失敗 | 期待効用 |
|---|---:|---:|---:|
| 投資（賭け）に参加 | 500 | 100 | 16.180 |
| オプションをプレミアム $C$ で入手 | $500-C$ | $300-C$ | $\pi$ |
| 確率 | 0.5 | 0.5 | |

（単位：万円、ただし期待効用は除く）

ここで、 $\pi = 0.5\sqrt{500-C} + 0.5\sqrt{300-C}$

はオプションを購入した場合の、 期待効用です。

この $\pi$ が投資に参加するときの期待効用 16.180 と等しくなるような $C^*$ は、

$$\pi = 0.5\sqrt{500-C^*} + 0.5\sqrt{300-C^*} = 16.180$$

を解いて、

$$C^* \simeq 128.6475\ (\text{万円}).$$

これは、投資家の効用関数に基づくオプションプレミアム（実際には、リスク中立な投資家だと 100（万円）まで払うので、純粋なプレミアムは $128.6475 - 100 = 28.6475$ です。この投資家にとっては、投資の失敗の影響を受けるのを防いでくれ（ヘッジ (hedge) するといいます）、かつ投資が成功したときにはおいしい部分を手にすることを可能にしてくれるオプションに対して最大 $C^* = 128.6475$（万円）まで支払う意思があるということです。

では、実際のオプション価格はいくらになるのでしょうか？オプション価格の導出は、価値の複製によって可能です。オプションと同じお金の流れ（価値）を実現する原資産の組み合わせを作って、その原資産の組み合わせの価格＝オプション価格という導出法がとられるのです。

ここで、原資産として、投資（賭け）

$$\left\langle \begin{array}{ll} 500\,(\text{万円}), & \text{確率 } 0.5\,(\text{投資が成功}) \\ 100\,(\text{万円}), & \text{確率 } 0.5\,(\text{投資が失敗}) \end{array} \right.$$

と、もうひとつ、安全資産

$$\left\langle \begin{array}{ll} 1\,(\text{万円}), & \text{確率 } 0.5\,(\text{投資が成功}) \\ 1\,(\text{万円}), & \text{確率 } 0.5\,(\text{投資が失敗}) \end{array} \right.$$

つまり１万円を確約する資産、が存在しているとします。
原資産の価格について、投資の価格を $E$（万円）, 安全資産の価格を $B$（万円）とおきます。

これに対し、オプションを購入すると、

$$\left\langle \begin{array}{ll} 500\,(\text{万円}), & \text{確率 } 0.5\,(\text{投資が成功}) \\ 300\,(\text{万円}), & \text{確率 } 0.5\,(\text{投資が失敗}) \end{array} \right.$$

という将来時点でのお金の流れが生じます（現時点ではプレミアム $C$ を支払います）が、これと同じお金の流れを投資と安全資産とで複製するのです。

投資を $a$ 単位、安全資産を $b$ 単位、という資産の組み合わせ（ポートフォリオ）を作ると、投資が成功すると、$500 \times a$（万円）が投資から、$1 \times b$（万円）が安全資産から得られて、合計 $500a + b$（万円）のお金の流れが生じます。一方、投資が失敗すると、$100 \times a$（万円）が投資から、$1 \times b$（万円）が安全資産から得られて、合計 $100a + b$（万円）のお金の流れが生じます。

$$\left\langle \begin{array}{ll} 500a + b\,(\text{万円}), & \text{確率 } 0.5\,(\text{投資が成功}) \\ 100a + b\,(\text{万円}), & \text{確率 } 0.5\,(\text{投資が失敗}) \end{array} \right.$$

$a$ と $b$ をうまく選んで、

$$\left\langle \begin{array}{ll} 500\,(\text{万円}), & \text{確率 } 0.5\,(\text{投資が成功}) \\ 300\,(\text{万円}), & \text{確率 } 0.5\,(\text{投資が失敗}) \end{array} \right.$$

となるようにすれば、お金の流れの複製は完了です。

$$500a + b = 500, \qquad 100a + b = 300$$

を解いて、

$$a = 0.5, \quad b = 250$$

が求まります。

投資 0.5 単位と安全資産 250 単位を組み合わせることで、オプションと同じ将来のお金の流れが複製できます。同じお金の流れが生じるのですから、現時点での両者の価格は等しくならないと均衡しません。そうでないと、高いほうを売って安いほうを買うことによって無リスクで利益をあげることができるからです。これを無裁定条件 (No Arbitrage Condition) といいます。よって

$$\text{オプションの価格} = 0.5E + 250B$$

となります。ここで注意したいのは、効用関数なしでオプションの価格が導出できるということです。また、成功確率・失敗確率が（0.5,0.5）でなくても、オプション価格は今のやり方で $0.5E+250B$ となります。ただし、成功確率・失敗確率が変化すると、原資産の価格が変化することでオプション価格も変化するでしょう。しかし、オプション価格の公式は相変わらず同じなのです。

300（万円）を手放してオプションを手に入れるのに、投資家は最大 $C^* = 128.6475$ を支払ってもよいと考えています。一方、現時点で 300 万円を手放してオプションを購入すると、$(0.5E+250B)-300$ を支払わねばなりません。よって、$128.6475 > (0.5E + 250B) - 300$, つまり

$$428.6475 > (0.5E + 250B)$$

なら、オプションを購入することで（リスクヘッジ効果により）期待効用を高めることができます。

このように、オプション価格は、オプションが対象とする原資産の価格とその価格変動のパラメータがわかれば、効用関数、成功・失敗の確率に関係なくもとまるのです。これが金融派生商品

(Derivatives、オプションもそのうちの一つ、他に先物、スワップがあります) の価格付けの基本的考え方です。

〔参考〕　不確実性の経済学およびファイナンス関係のサイト

http://www.crcast.osaka-u.ac.jp/oniki/jpn/lecture/gu-under/ecinf/ 情報と経済について

http://www.iptp.go.jp/reserch/monthly/m-serch/finance/1998/no114/2.html デリバティブ取引の仕組みとその役割

http://www.iijnet.or.jp/derivatf/pof.HTM ファイナンスの哲学、Black=Scholes 公式の導出

http://www.me.titech.ac.jp/lab/shirakawa/index.html 日本での数理ファイナンスのメッカ東工大の白川ゼミ

http://www.boj.or.jp/ronbun/ 日本銀行の論文集

http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/ tomomi/B4-M2/list.html 数理工学

## 3　ゲーム理論

次の 2 人零和ゲームをつくり、意味付けと解釈を与えなさい。
i) ナッシュ均衡が 2 通りあり、パレート優劣関係がない場合
ii) ナッシュ均衡が 2 通りあり、パレート優劣関係がある場合
〔ヒント〕「意味付け」と「解釈」は“ OOゲーム ”と名称をつけることで達成される。

〔解答例〕

i) 2つのナッシュ均衡点に互いにパレート優劣関係のない例の典型は「チキンゲーム」と「両性の闘い」です。

チキンゲーム

| 1P／2P | 突進する | 逃げる |
|---|---|---|
| 突進する | (-5,-5) | ( 3,-3) |
| 逃げる | (-3, 3) | (-1,-1) |

両性の闘い

| 1P／2P | ボクシング | バレエ |
|---|---|---|
| ボクシング | ( 5, 2) | ( 1, 1) |
| バレエ | (-3,-3) | ( 2, 5) |

ii) 同じく、パレート優劣関係のある場合の典型は、「協同ゲーム」(Coordination Game) で、それぞれ自分が生産するフロッピーディスクの大きさ（大か小か）を決定する下記のゲームが考えられます。

協同ゲーム

| 1P／2P | 大 | 小 |
|---|---|---|
| 大 | ( 5, 5) | ( 0,-2) |
| 小 | (-2, 0) | ( 2, 2) |

注）　i) では自己に有利なナッシュ均衡を実現しようという 2プレーヤー間の利害の対立があり、どちらの均衡点が実現するかはあらかじめ予測しがたい（だからこそ、先制・コミットメントが重要）ですが、ii) ではその状況は存在せず、一定のコミュニケーションの方法さえ備わっていれば、パレート優位の均衡点の成立は明らかです。また、コミュニケーションの方法がなくても利得表さえ与えられていれば、パレート優位の均衡点が実現する可能性が高いように思えますが、これにつ

いては自分で考えてみてください。

〔参考〕　ゲーム理論関係のサイト

http://www.tku.ac.jp/~kagawa/akio/text/kougi.html ゲーム論をはじめとする経済学入門

http://club.pep.ne.jp/~nbi004/thesis _ top.htm 初期の歴史から学ぶゲーム理論

http://degulab.econ.kyoto-u.ac.jp/students/dai1ki _/suzuki _/soturon　共有地の悲劇とその回避法

http://www2s.biglobe.ne.jp/~y _ suzuki/trendy/game/kk96.htm 環境配慮消費行動のゲーム理論的モデルによる検討

http://www-socpsy.l.u-tokyo.ac.jp/hayashi/game.htm 進化ゲームの世界へ

http://www2.justnet.ne.jp/~tkonaka/bpse1/b _ menu.html 生物生産システム工学

# 4　産業連関分析

次の投入産出係数行列（Input-Output Table、I－O表）を考える。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.1\\ 0.4 & 0.5\end{pmatrix}$$

経済全体で最終需要が各々１単位づつ減少した場合、第１産業と第２産業とでどちらがより大きな（生産削減という）影響を受けるか？　〔ヒント〕$\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

〔解答例〕

$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}, \mathbf{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$　をそれぞれ総生産量ベクトルと最終需要ベクトルとすると、

$$\mathbf{Ax}+\mathbf{b}=\mathbf{x}$$

と表されますが、これを移項すると、

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

となります。最終需要 $\mathbf{b}$ を達成するような総生産量ベクトル $\mathbf{x}$ は、

$$\mathbf{x}=(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$$

です。ここで、

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})=\begin{pmatrix}0.9 & -0.1\\ -0.4 & 0.5\end{pmatrix}$$

なので、レオンチェフ逆行列は

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{pmatrix}1.2195 & 0.2434\\ 0.7756 & 2.1951\end{pmatrix}$$

です。経済全体で最終需要が各々１単位減少したのですから、以前の最終需要が $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$ と表されるなら、最終需要は　$\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$　に減っています。これに伴い、総生産量も、

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}=(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$$

から、

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{b}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})=(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\begin{pmatrix}b_1-1\\b_2-1\end{pmatrix}$$

に変化しています。

よって総生産量の変化は、

$$-(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1.2195 & 0.2434\\0.7756 & 2.1951\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1.4634\\-2.9707\end{pmatrix}$$

となり、第２産業への影響のほうが大きいことがわかります。また同様に、経済全体で最終需要が各々１単位ずつ増加すると、各産業の総生産量は

$$\begin{pmatrix}1.4634\\2.9707\end{pmatrix}$$

だけ増え、やはり第２産業への影響のほうが大きいことがわかります。

注）　レオンチェフ逆行列の各行和（ヨコ系列)、つまり最終需要ベクトルが各々１単位ずつ増加したときの各産業の生産量の増加（最終需要の増加＋中間需要の増加)、

1.2195+0.2439=1.4634　　0.7756+2.1951=2.9707

は、各産業の最終需要の影響の受け方の度合いをあらわす「感応度係数」といい、感応度係数の高い産業は「川下産業」といいます（実際には、「感応度係数」は上記２数の平均の何倍になるかで示します。つまり、第１産業の感応度係数 $=1.4634/(\frac{1.4634+2.9707}{2})=0.6697$, 第２産業の感応度係数 $=2.9707/(\frac{1.4634+2.9707}{2})=1.3303$ ですが、感応度の相対比較をする上では各行和の比較で十分です)。

一方、レオンチェフ逆行列の各列和（タテ系列)、つまり最終需要ベクトルの第 i(i=1,2) 列のみが１単位増加したときの各産業の生産量の増加を足し合わせたものは、それぞれ

1.2195+0.7756=1.9951　　0.2439+2.1951=2.4390

で、第１産業についてみれば、

$$\begin{pmatrix}1.2195 & 0.2434\\0.7756 & 2.1951\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.2195\\0.7756\end{pmatrix}$$

つまり、第１産業への最終需要が１単位増加すると、第１産業では最終需要と中間需要あわせて 1.2195 単位の生産増加、第２産業では中間需要のみで 0.7756 単位の生産増加、全体で 1.9951 単位の生産増加が生じます。同様に、第２産業への最終需要が１単位増加すると第２産業では最終需要と中間需要あわせて 2.1951 単位の生産増加、第１産業では 0.2434 単位の生産増加、全体では 2.4390 単位の生産増加が生じます。このように、レオンチェフ逆行列の各列和は、各産業への最終需要増加が経済全体での総生産増加に与える影響の度合いを表す「影響力係数」といい、影響力係数の高い産業は「川上産業」と呼ばれます（実際には、上記２数の平均の何倍になるかであらわし、第１産業の影響力係数 $=1.9951/\frac{1.951+2.4390}{2}=0.8999$、第２産業の影響力係数 $=2.4390/\frac{1.951+2.4390}{2}=1.1001$ ですが、影響力の相対比較をする上では各列和の比較で十分です)。

注）　異なる産業の比較を行う上では、適当な単位でそろえて生産量などを評価することが必要で、ふつうは貨幣金額で評価します。

〔フロベニウス根 (Frobenius Root)〕

ところでさらに数学的に進んだ議論ができます．方程式

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

において、$\mathbf{b}\geq\mathbf{0}$（成分がすべて非負のときこう書きます）に対して $\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$ となってほしいの

ですが、これは正の最終需要に対して正の総生産が対応していないとおかしいからです。実はこのことと、絶対値が最大の固有値 $\rho$ が $|\rho| < 1$ となることとは同値である事が知られています。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

なので、固有値は

$$\begin{vmatrix} 0.1-\lambda & 0.1 \\ 0.4 & 0.5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

の解、つまり

$$(0.1-\lambda)(0.5-\lambda) - 0.04 = \lambda^2 - 0.6\lambda + 0.01 = 0$$

の解で、

$$\lambda_1 = 0.3 + \sqrt{0.09 - 0.01} = 0.3 - 0.2\sqrt{2} \simeq 0.5828$$
$$\lambda_2 = 0.3 - \sqrt{0.09 - 0.01} = 0.3 - 0.2\sqrt{2} \simeq 0.0172$$

より、絶対値が最大の固有値 $\rho$ は $\rho \simeq 0.5828$ で、1 より小さくなっています。この $\rho$ を $\mathbf{A}$ のフロベニウス根 (Frobenius Root) といいます。

〔参考〕　産業連関分析関係のサイト

http://www.stat.go.jp/05h.htm 総務庁のサイト、1995 年度調査の 32 部門表があります

http://www.pref.kagoshima.jp/toukei/sanren/sanren.htm 鹿児島の産業連関

http://www.iptp.go.jp/reserch/monthly/m-serch/finance/1998/no114/2.html 地域間の産業構造の格差

http://210.149.71.51/factory/doc/kouka.html 工業団地等の経済分析

http://econom01.cc.sophia.ac.jp/seminar/semi98/ 地域間交易への応用

# 5 微分方程式

i) 自律系（微分方程式システム）

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y, \qquad \frac{dy}{dt} = 3x + 4y$$

において、x=0,y=0 は安定均衡点 (Steady Equilibrium) ではないことを示しなさい。

ii) 一般に、自律系（微分方程式システム）

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{a}x + \mathrm{b}y, \qquad \frac{dy}{dt} = \mathrm{c}x + \mathrm{d}y$$

において、x=0,y=0 は安定均衡点 (Steady Equilibrium) ではないことを示しなさい。

〔解答例〕

i) 連立微分方程式の解の動きは、一般に、係数行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

の固有値で決まります。固有値は、

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

の解、つまり

$$(1-\lambda)(4-\lambda)-6=\lambda^2-5\lambda-2=0$$

の解ですが、判別式 $D=25+8>0$ より、２つの実数解 $\lambda_1, \lambda_2$ を持ち、また、$\lambda_1+\lambda_2=5>0$ より２つの実数解のうちの少なくとも一方の符号は正だということがわかります。

今のケースは、

$$\lambda_1=\frac{5+\sqrt{33}}{2}>0, \lambda_2=\frac{5-\sqrt{33}}{2}<0$$

で、２実根異符号のケースです。この場合、鞍点均衡 (Saddle Point Equilibrium) となり均衡点 $x=0, y=0$ は不安定です。

ii) 一般の微分方程式の解の動きは、係数行列

$$A=\begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix}$$

の固有値で決まります。固有値は、

$$\begin{vmatrix} \mathrm{a}-\lambda & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

の解、つまり

$$(\mathrm{a}-\lambda)(\mathrm{d}-\lambda)-\mathrm{bc}=\lambda^2-(\mathrm{a}+\mathrm{d})\lambda+(\mathrm{ad}-\mathrm{bc})=0$$

の解ですが、判別式 $D=(\mathrm{a}+\mathrm{d})^2-4(\mathrm{ad}-\mathrm{bc})=(\mathrm{a}-\mathrm{d})^2+4\mathrm{bc}$ の符号が非負なら実根、負なら複素根だということがわかります。

$D>0$ ならば、２実根のケースで、$\lambda_1+\lambda_2=(\mathrm{a}+\mathrm{d})>0$ より２つの実数解のうちの少なくとも一方の符号は正だということがわかります。よって、解の動きは単調に発散します。

$D<0$ ならば、共役な複素根のケースで、$\lambda_1+\lambda_2=(\mathrm{a}+\mathrm{d})>0$ より複素根の実部の符号は正だということがわかります。よって、解の動きは振動しながら発散します。

$D=0$ ならば、重根のケースですが、$\lambda_1+\lambda_2=(\mathrm{a}+\mathrm{d})>0$ より重根は実数で符号は正だということがわかります。よって、解の動きは単調に発散します。

線形代数でよく知られているように、固有値が重解とならなければ、固有値、固有ベクトルを用いて係数行列 A を対角化し、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

から、

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^{-1}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表せます。ここで、$x_{11}, x_{21}$ は固有値 $\lambda_1$ に対応する固有ベクトル $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}$ の成分に相当し、同様に、$x_{12}, x_{22}$ は固有値 $\lambda_2$ に対応する固有ベクトル $\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}$ の成分に相当します。

また、$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}$ は一次独立です。

ここで、

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とベクトル $\mathbf{z}$ を定義すると、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

よって、

$$z_1 = c_1 exp(\lambda_1 t) \quad , z_2 = c_2 exp(\lambda_2 t)$$

$c_1, c_2$ は任意定数で、初期条件などから具体的にもとまります。$\mathbf{z}$ の定義より、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 exp(\lambda_1 t) \\ c_2 exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11}c_1 exp(\lambda_1 t) + x_{12}c_2 exp(\lambda_2 t) \\ x_{21}c_1 exp(\lambda_1 t) + x_{22}c_2 exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix}$$

と求まります。

i) では $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ でしたが、$t$ を無限大に近づけると $(t \to \infty)$、$c_1$ が特殊なケースを除いて、$x, y$ は時間とともに無限大へ発散してしまうことがわかります。たまたま $c_1 = 0$ という特殊なケースが生じていれば、$x, y$ は時間とともにゼロに収束していきます（鞍点均衡）。ただし、この「たまたま」は、まさに初期条件などに依存する偶然の産物で、もしこの「たまたま」の実現を保証したければ（この初期条件しかありえないといったような）別の条件を導入しなければなりません。

〔参考〕　微分方程式関係のサイト

http://www.hss.iwate-u.ac.jp/~sisidot/bibun1.htm 微分方程式の数値計算

http://www.ylw.mmtr.or.jp/~imaizumi/im-excel.html EXCEL のシートで微分方程式が簡単に解ける

http://www.asahi-net.or.jp/~xx7k-ysmr 為替ディーラの方でしょうか？

http://www.sun-inet.or.jp/~khirai/Chaos2.htm カオス

http://www4.justnet.ne.jp/ masema/eigenvalue.html 固有値・固有ベクトルについて

# 6　データ解釈

次の図 (a),(b),(c) を見て、死亡率と離婚率の相関係数 (Correlation Coefficient) がマイナスであることを解釈しなさい。

図 (a) はここをクリック　図 (b) はここをクリック　図 (c) はここをクリック

〔解答例〕

これは「見かけ上の相関」の解釈の典型例です。(b)(c) を見ると、20〜34 歳の人口割合が大きければ、死亡率が低い一方で離婚率は高いという標本が得られやすくなっています。他方、20〜34

歳の人口割合が小さければ、死亡率が高い一方で離婚率は低いという標本が得られやすくなっています。

(a) だけを見て離婚率が低いから死亡率が高い、とか、死亡率が低いから離婚率が高い、といった安直な解釈には注意しましょう。年齢というファクターがカギを握っている可能性があるのです。

50 歳以上の人は死亡率は相対的に高いでしょうが離婚率は相対的に低いと思われます。一方 20〜30 歳代の人は死亡率は相対的に低いでしょうが離婚率が相対的に高いかと思われます。

年齢とともに死亡率が変化するのは自然ですが、年齢とともに離婚率が変化するのはなぜでしょうか？

若いうちは離婚してもやり直しがきくからだ、という答えが返ってきそうです。それでは、なぜやり直しがききやすいのでしょうか？若いからだ、となりそうです。若いから、死亡率は低いし、やり直しもきいて離婚しても何とかやっていける、というのであれば、年齢というファクターが死亡率や離婚率といった指標に影響を与えているといえます。

ただし、こうした解釈は数ある解釈のうちの一つに過ぎず、はじめからこれだと決め付けてデータを見ないよう注意しましょう。数ある解釈のうちでデータに適合するのはどれかを比較すること、そして既存の解釈ではデータをうまく説明できなければ自分なりの新しい解釈を考えること、が大切なのです。

〔参考〕　統計学関係のサイト

http://mogibiwa.econ.nagasaki-u.ac.jp/lecture/stat98/excel/cov2.htm 文盲率・出生率・在学率の相関

http://aoki2.si.gunma-u.ac.jp/lecture/index.html 統計学自習ノート

http://alps.shinshu-u.ac.jp/ITAN/GED/SUZUKI/topJ.html 統計学博物館